2009 / 2008

# السلسلة رقم 02 : جملة الإحداثيات

**- التمرين 01** : مثل في جملة الإحداثيات الديكارتية ، النقطة $M(\,2\,,\,4\,)$ ، ثم أوجد إحداثياتها في جملة الإحداثيات القطبية و أعد تمثيلها في هذا النظام مع رسم أشعة الواحدة الموافقة لها. مثل كذلك في جملة الإحداثيات القطبية ، النقطة $N(\,4\,,\,\pi/3\,)$ وأشعة واحدتها ، ثم أستخرج إحداثياتها الديكارتية الموافقة.

**- التمرين 02** : تتحرك النقطة $M$ على مسارتكتب معادلته في الإحداثيات القطبيةمن الشكل :
$\rho = a.\theta$ ، حيث أن $a$ ثابت موجب ، شكل جدولا تحدد فيه تغير $\rho$ بدلالة $\theta$ ثم أرسم هذا المسار في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$ ، حدد موقع النقطة $M_0\,(\theta = 2\pi/3)$ وارسم شعاعي الواحدة الموافقين

**- التمرين 03** : تعطى في جملة الإحداثيات الديكارتية، النقطة $M(\,2\,,\,3\,,\,3\,)$ ، أوجد في جملة الإحداثيات الأسطوانية عبارة كل من $\rho$ و $\theta$ و $z$ ، أكتب عبارة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ و أحسب طويلته. مثل كذلك في جملة الإحداثيات الأسطوانية النقطة $N(\,3\,,\,\pi/3\,,\,4\,)$ ، ثم أستنتج إحداثياتها الديكارتية الموافقة.

**- التمرين 04** : مثل في جملة الإحداثيات الكروية موقع النقطة $(\,4\,,\,\pi/3\,,\,\pi/6\,)$ و أشعة الواحدة الكروية التابعة لها ، ثم أوجد الإحداثيات الديكارتة الموافقة.
أوجد الإحداثيات الكروية الموافقة للنقطة $N(\,6\,,\,5\,,\,-3\,)$ و مثل أشعة الواحدة لها.

**- التمرين 05** : تكتب معادلة مسار النقطة المادية $M$ في جملة الإحداثيات الأسطوانية بالعلاقة :
$\rho = Cte$ و $z = a.\theta$ ، حيث أن $a$ ثابت موجب. أرسم هذا المسار من أجل
$0 \le \theta \le 4\pi$ . ثم مثل أشعة الواحدة عند النقطة $(\,\theta_0 = \pi/3\,)$

**- التمرين 06** : 1- أحسب في الإحداثيات الديكارتية مساحة السطح المحصور في المجال :
$$-1 \le X \le +3 \quad و \quad 2 \le Y \le 5$$
2- أحسب باستعمال الإحداثيات القطبية محيط و مساحة دائرة نصف قطرها $R$
3- أحسب في الإحداثيات الكروية مساحة شطر من كرة نصف قطرها $R$ والمحدود بالمجال $0 \le \varphi \le \pi/2$ و $0 \le \theta \le \pi/2$
4- أحسب في نفس الجملة حجم جزء من الكرة و الحصور في المجال : $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le \varphi \le \pi$ ثم استنتج مساحة و حجم هذه الكرة.

**- التمرين 07** : ليكن الشعاعان : $\vec{U}_r = \cos q\,\vec{i} + \sin q\,\vec{j}$ و $\vec{U}_q = -\sin q\,\vec{i} + \cos q\,\vec{j}$ حيث :
$q = wt$ و $w$ ثابت موجب
1- أحسب طويلتي الشعاعين ، ماذا تستنتج
2- أحسب الجداءات السلمية $\vec{U}_r \cdot \vec{U}_r$ ، $\vec{U}_r \cdot \vec{U}_q$ و $\vec{U}_q \cdot \vec{U}_q$
3- أحسب $\dfrac{d\vec{U}_r}{dq}$ ، $\dfrac{d\vec{U}_q}{dq}$ ، ثم $\dfrac{d\vec{U}_r}{dt}$ و $\dfrac{d\vec{U}_q}{dt}$ ماذا تلاحظ ، بين أن : $\dfrac{d\vec{U}r}{dt} + w\vec{U}_r = \vec{0}$
5- أحسب الجداءات الشعاعية $\vec{U}_r \wedge \vec{U}_q$ ، $\vec{U}_r \wedge \vec{k}$ ، $\vec{U}_q \wedge \vec{k}$ ، و $\dfrac{d(\vec{U}_r \wedge \vec{k})}{dt}$

**- التمرين 08** : في حالة التمرين **(02)** ارسم شعاعي الواحدة الموافقين عند المواقع
$. \; q = p/4, \; p/2, \; 2p/3, \; 2p$

كذلك من أجل المسار المعرف بالمعادلة $r = a\sqrt{1 - (c/a)^2 .\mathrm{Sin}^2 q}$ ، حيث أن a و b ثابتان موجبان و $e = c/a$ يسمى تباعد المركز و $c^2 = a^2 - b^2$ ، شكل في جدول مجموع قيم $\theta$ و $\rho$ الموافقة، أرسم هذا المسارو حدد طبيعته، ماذا يمثل كل من a وb. مثل من أجل: $\theta = 0 \;,\; \pi/3 \;,\; \pi/2 \;,\; 2\pi/3$ أشعة الواحدة التابعة.

أعد نفس السؤال من أجل المعالة القطبية : $r = r_0(1 + \mathrm{Cos}q)$ في المجال $0 \leq \theta \leq 2\pi$

**- التمرين 09** : أعد نفس السؤال**(05)** من أجل المعادلة : $\rho = b.\theta$ و $z = a.\theta$ ، a و b ثابتان موجبان في المجال $0 \leq \theta \leq 4\pi$ . ثم مثل أشعة الواحدة عند النقطة $(\theta_0 = \pi/4)$

# سلسلة تمارين حول جملة الإحداثيات

**ـ التمرين 01** : مثل في جملة الإحداثيات الديكارتية ، النقطة $M(2\ ,\ 4)$ ، ثم أوجد إحداثياتها في جملة الإحداثيات القطبية و أعد تمثيلها في هذا النظام مع رسم أشعة الواحدة الموافقة لها. مثل كذلك في جملة الإحداثيات القطبية ، النقطة $N(4\ ,\ \pi/3)$ وأشعة واحدتها ، ثم أستخرج إحداثياتها الديكارتية الموافقة.

**الحل :**

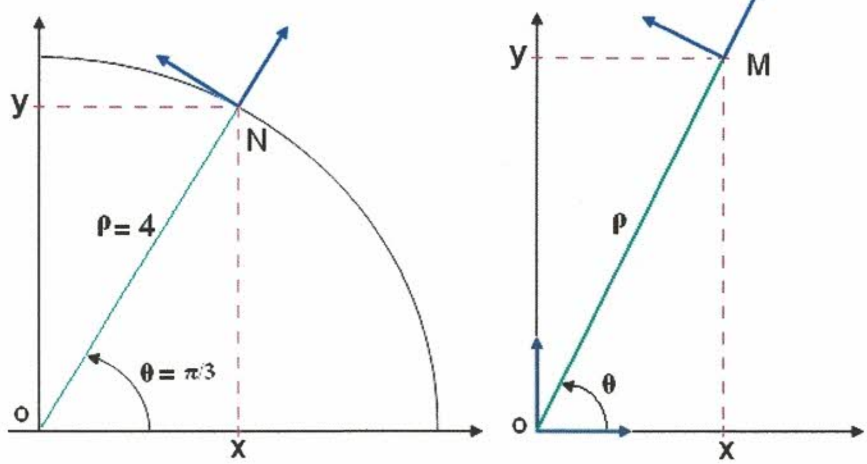
$$tg\theta = \frac{y}{x}\ ,\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \Leftarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \rho.\vec{U}_\rho$$

ـ النقطة $M(2\ ,\ 4)$ :

$$tg\theta = \frac{4}{2} = 2\ ,\ \theta = 63.44° \quad , \quad \rho = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$$

ـ النقطة $N(4\ ,\ \pi/3)$ :

$$y = \rho Sin\theta = 4Cos\frac{\pi}{3} = 2\ ,\ x = \rho Cos\theta = 4Sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$




**ـ التمرين 02** : تتحرك النقطة M على مسار معادلته في الإحداثيات القطبية من الشكل : $\rho = a.\theta$ ، حيث أن a ثابت موجب، شكل جدول تغير ρ بدلالة θ ثم أرسم هذا المسار في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$ ، حدد موقع النقطة $M_0\ (\theta = 2\pi/3)$ وارسم شعاعي الواحدة الموافقين.

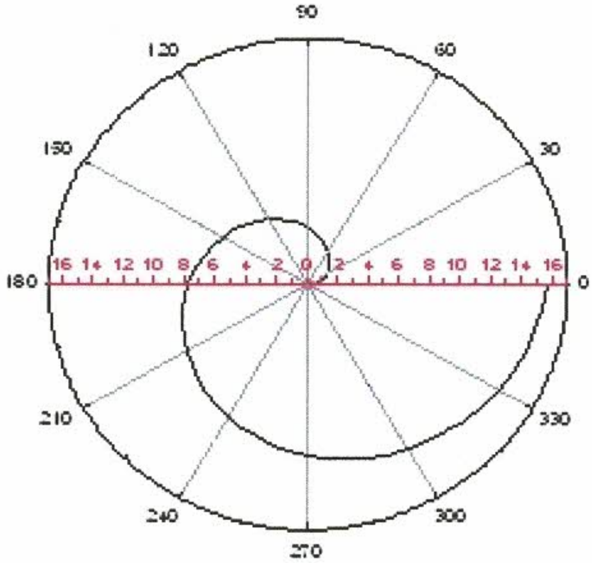
**الحل :**

| θ | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 | 2π/3 | 3π/4 | 5π/6 | π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ρ | 0 | aπ/6 | πa/4 | aπ/3 | aπ/2 | 2aπ/3 | 3aπ/4 | 5aπ/6 | aπ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7π/6 | 5π/4 | 4π/3 | 3π/2 | 5π/3 | 7π/4 | 11π/6 | 2π |
| 7aπ/6 | 5aπ/4 | 4aπ/3 | 3aπ/2 | 5aπ/3 | 7aπ/4 | 11aπ/6 | 2aπ |

من الناحية العملية يجب تحديد قيمة الثابت a لكي نستطيع رسم المنحني، نأخذ مثلا $a = 2.5$ .

| θ | ρ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 30 | 1.309 |
| 60 | 2.618 |
| 90 | 3.927 |
| 120 | 5.236 |
| 150 | 6.545 |
| 180 | 7.854 |
| 210 | 9.163 |
| 240 | 10.472 |
| 270 | 11.781 |
| 300 | 13.09 |
| 330 | 14.399 |
| 360 | 15.708 |




**ـ التمرين 03** : تعطى في جملة الإحداثيات الديكارتية، النقطة ( 3 , 3 , 2 )M ، أوجد في جملة الإحداثيات الأسطوانية عبارة كل من ρ و θ و z ، أكتب عبارة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ و أحسب طويلته. مثل كذلك في جملة الإحداثيات الأسطوانية النقطة ( 4 , π/3 , 3 )N ، ثم أستنتج إحداثياتها الديكارتية الموافقة.

**الحل :**

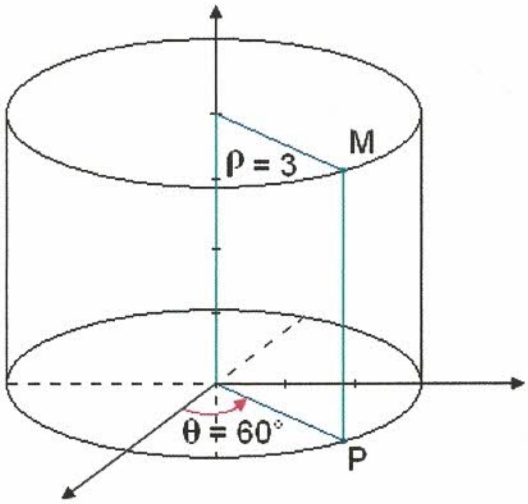
ـ إيجاد عبارة كل من ρ و θ و z :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$z = z \quad و \quad \theta = arctg\frac{3}{2} = 56.31 \Leftarrow tg\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{2}$$

ـ $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$ , $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} = \sqrt{13}\vec{u}_\rho + 3\vec{k}$

ـ مثل النقطة ( 4 , π/3 , 3 )N :



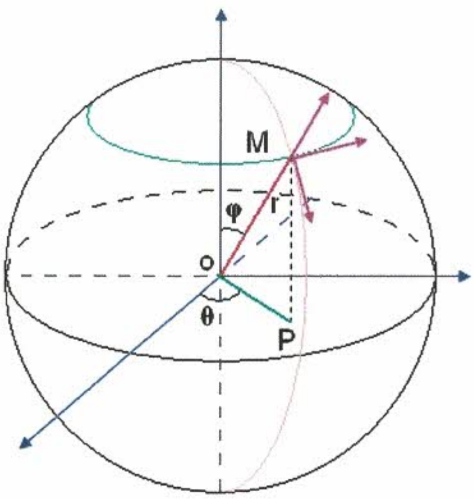

$$x = \rho.Cos\theta = 3Cos\frac{\pi}{3} = 1.5$$

$$y = \rho.Sin\theta = 3Sin\frac{\pi}{3} = 1.5\sqrt{3}$$

$$z = 4$$

**ـ التمرين 04** : مثل في جملة الإحداثيات الكروية موقع النقطة $M(4\ ,\ \pi/3\ ,\ \pi/6)$ و أشعة الواحدة الكروية التابعة لها ، ثم أوجد الإحداثيات الديكارتية الموافقة.
أوجد الإحداثيات الكروية الموافقة للنقطة $N(6\ ,\ 5\ ,\ -3)$ و مثل أشعة الواحدة لها.

**الحل :**




ـ إحداثيات النقطة M :

$$x = rSin\varphi Cos\theta = 4Sin\frac{\pi}{6}Cos\frac{\pi}{3} = 1$$

$$y = rSin\varphi Sin\theta = 4Sin\frac{\pi}{6}Sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$z = rCos\varphi = 4Cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$$

ـ إحداثيات النقطة N :

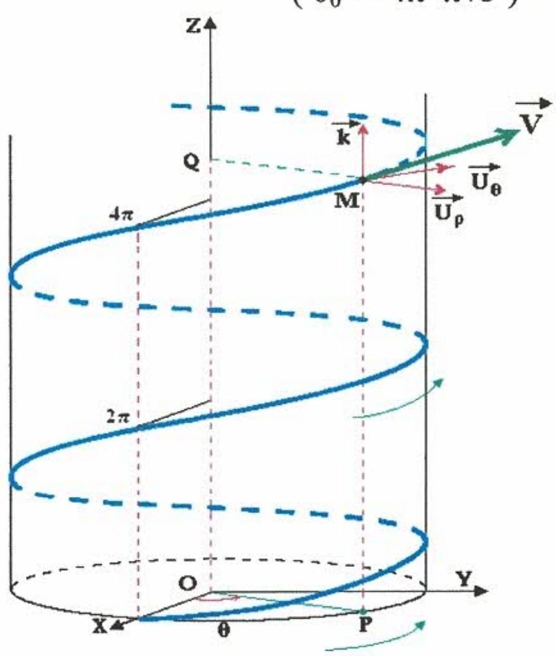
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{36+25+9} = \sqrt{70}$$

$$\theta = artg\left(\frac{y}{x}\right) = artg\left(\frac{5}{6}\right) = 39.81° \quad , \quad \varphi = arCos\left(\frac{z}{r}\right) = arCos\left(\frac{-3}{\sqrt{70}}\right) = 111.01°$$

---

**ـ التمرين 05** : تكتب معادلة مسار النقطة المادية M في جملة الإحداثيات الأسطوانية بالعلاقة :
$\rho = Cte$ و $z = a.\theta$ ، حيث أن a ثابت موجب. أرسم هذا المسار من أجل $0 \le \theta \le 4\pi$ . ثم مثل أشعة الواحدة عند النقطة $(\theta_0 = 4\pi+\pi/3)$

**الحل :**




هنا الحركة لولبية تصاعدية منتظمة تتم على مسار منتظم متكئ على أسطوانة شاقولية محورها Oz.
المسافة الشاقولية بين حلقتين متتاليتين تكون دائما ثابتة و تساوي $2a\pi$ .
عند الزاوية $\theta_0 = 4\pi+\pi/3$ تكون النقطة M قد قامت بدورتين كاملتين و زاوية $\pi/3$ .
نلاحظ كذلك أن السرعة تكون مائلة و تصنع زاوية معينة مع شعاع الواحدة $\vec{U}_\theta$

---

**ـ التمرين 06** : 1- أحسب في الإحداثيات الديكارتية مساحة السطح المحصور في المجال :

$-1 \leq X \leq +3$ و $2 \leq Y \leq 5$

2- أحسب باستعمال الإحداثيات القطبية محيط و مساحة دائرة نصف قطرها R

3- أحسب في الإحداثيات الكروية مساحة شطر من كرة نصف قطرها R والمحدود بالمجال

$0 \leq \varphi \leq \pi/2$ و $0 \leq \theta \leq \pi/2$

4- أحسب في نفس الجملة حجم جزء من الكرة و الحصور في المجال : $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq \varphi \leq \pi$ ثم استنتج مساحة و حجم هذه الكرة.

**الحل :**

1- لدينا:
$$S = \int_{-1}^{3}\int_{2}^{5} dx.dy = \int_{-1}^{3} dx.\int_{2}^{5} dy = [x]_{-1}^{3}.[y]_{2}^{5} = 4.3 = 12$$

2- لدينا : $d\vec{l} = d\rho\vec{U}_\rho + \rho d\theta\vec{U}_\theta$ ونحصل على $\|d\vec{l}\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$ وفي حالة الدائرة لدينا: $\rho = R = ct \Leftarrow d\rho = 0$ فيكون $\|d\vec{l}\| = Rd\theta$ و يكون محيط الدائرة:

$$L = \int_0^{2\pi} \|d\vec{l}\| = \int_0^{2\pi} Rd\theta = 2\pi R$$

و تكون المساحة العنصرية: $dS = d\rho.\rho d\theta$ ونحصل على مساحة الدائرة

$$S = \int_0^R\int_0^{2\pi} dS = \int_0^R\int_0^{2\pi} d\rho.\rho d\theta = \int_0^R \rho d\rho.\int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{1}{2}R^2.2\pi = \pi R^2$$

3- في هذه الحالة عنصر الطول يكتب من الشكل: $d\vec{l} = dr.\vec{U}_r + rd\varphi.\vec{U}_\theta + rSin\varphi d\theta.\vec{U}_\varphi$

في حالة المساحة يكون لدينا : $r = R = ct \Leftarrow dr = 0$ و نجد

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 Sin\varphi.d\varphi.d\theta \Leftarrow dS = Rd\varphi.RSin\varphi d\theta = R^2 Sin\varphi.d\varphi.d\theta$$

لنجد في الأخير:
$$S = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin\varphi d\varphi.\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = R^2[-Cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}.[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}R^2$$

4- و يكون الحجم : $dV = dr.rd\varphi.rSin\varphi d\theta = r^2 dr.Sin\varphi d\varphi.d\theta \Leftarrow$

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} r^2 dr.Sin\varphi d\varphi.d\theta = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R.[-Cos\varphi]_0^{\pi}.[\theta]_0^{\pi} = \tfrac{2}{3}\pi R^3$$

المساحة المحسوبة في السؤال 3 تمثل 1\8 من الكرة لدلك تكون مساحة الكرة:

$$S_{sphere} = 8.S = 8.\tfrac{\pi}{2}R^2 = 4\pi R^2$$

والحجم المحسوب في السؤال 4 يمثل 1\2 الكرة و بالتالي نحصل على حجم الكرة:

$$V_{sphere} = 2.V = 2.\tfrac{2}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

**- التمرين 07** : ليكن الشعاعان : $\vec{U}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ و $\vec{U}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$ حيث :
$\theta = \omega t$ و $\omega$ ثابت موجب

1- أحسب طويلتي الشعاعين ، ماذا تستنتج

2- أحسب الجداءات السلمية $\vec{U}_\rho\cdot\vec{U}_\rho$ ، $\vec{U}_\rho\cdot\vec{U}_\theta$ و $\vec{U}_\theta\cdot\vec{U}_\theta$

3- أحسب $\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta}$ ، $\frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta}$ ، ثم $\frac{d\vec{U}_\rho}{dt}$ و $\frac{d\vec{U}_\theta}{dt}$ ماذا تلاحظ ، بين أن : $\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \omega\vec{U}_\rho = \vec{0}$

4- أحسب الجداءات الشعاعية $\vec{U}_\rho\wedge\vec{U}_\theta$ ، $\vec{U}_\rho\wedge\vec{k}$ ، $\vec{U}_\theta\wedge\vec{k}$ ، و $\frac{d(\vec{U}_\rho\wedge\vec{k})}{dt}$

**الحل:**

-1 $\|\vec{U}_\rho\| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = 1$ ، $\|\vec{U}_\theta\| = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = 1$

هذان الشعاعان شعاعا واحدة

-2
$$\vec{U}_\rho\cdot\vec{U}_\rho = \cos\theta.\cos\theta + \sin\theta.\sin\theta = 1$$
$$\vec{U}_\theta\cdot\vec{U}_\theta = (-\sin\theta).(-\sin\theta) + (\cos\theta).(\cos\theta) = 1$$
$$\vec{U}_\rho\cdot\vec{U}_\theta = \cos\theta.(-\sin\theta) + \sin\theta.\cos\theta = 0$$

-3
$$\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = \frac{d\cos\theta}{d\theta}\vec{i} + \frac{d\sin\theta}{d\theta}\vec{j} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = \vec{U}_\theta$$
$$\frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} = \frac{d-\sin\theta}{d\theta}\vec{i} + \frac{d\cos\theta}{d\theta}\vec{j} = -\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j} = -\vec{U}_\rho$$
$$\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \omega.\vec{U}_\theta \quad \text{و} \quad \frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\omega.\vec{U}_\rho$$

إذا أخذنا العلاقة الأخيرة و نقلنا الطرف الأيمن إلى الجهة الأخرى نحصل على العلاقة :
$$\frac{dU\rho}{dt} + \omega\vec{U}_\rho = \vec{0}$$

-4
$$\vec{U}_\rho\wedge\vec{U}_\theta = (\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})\wedge(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$
$$= \cos\theta^2\left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right) - \sin\theta^2\left(\vec{j}\wedge\vec{i}\right) = \vec{k}$$
$$\vec{U}_\rho\wedge\vec{k} = (\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})\wedge\vec{k} = \cos\theta(\vec{i}\wedge\vec{k}) + \sin\theta(\vec{j}\wedge\vec{k})$$
$$= \cos\theta\left(-\vec{j}\right) + \sin\theta\left(\vec{i}\right) = -\vec{U}_\theta$$
$$\vec{U}_\theta\wedge\vec{k} = (-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})\wedge\vec{k} = -\sin\theta(\vec{i}\wedge\vec{k}) + \cos\theta(\vec{j}\wedge\vec{k})$$
$$= -\sin\theta\left(-\vec{j}\right) + \cos\theta\left(\vec{i}\right) = \vec{U}_\rho$$

$$\frac{d(\vec{U}_\rho \wedge \vec{k})}{dt} = \frac{d\vec{U}_\rho}{dt} \wedge \vec{k} + \vec{U}_\rho \wedge \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d\vec{U}_\rho}{dt} \wedge \vec{k} = \omega \vec{U}_\theta \wedge \vec{k} = \omega \vec{U}_\rho$$

## تمارين إضافية غير محلولة

**- التمرين 08** : في حالة التمرين **(02)** ارسم شعاعي الواحدة الموافقين عند المواقع $\theta = \pi/4,\ \pi/2,\ 2\pi/3,\ 2\pi$ .

كذلك من أجل المسار المعرف بالمعادلة $\rho = a\sqrt{1 - (c/a)^2 .\mathrm{Sin}^2\theta}$ ، حيث أن a و b ثابتان موجبان و $e = c/a$ يسمى تباعد المركز و $c^2 = a^2 - b^2$ ، شكل في جدول مجموع قيم $\theta$ و $\rho$ الموافقة.
أرسم المسار و حدد طبيعته، ماذا يمثل a و b. مثل من أجل: $\theta = 0\ ,\ \pi/3\ ,\ \pi/2\ ,\ 2\pi/3$ أشعة الواحدة.
أعد نفس السؤال من أجل المعالة القطبية : $\rho = \rho_0(1 + \mathrm{Cos}\theta)$ في المجال $0 \leq \theta \leq 2\pi$

**- التمرين 09** : أعد التمرين **(05)** من أجل المعادلة : $\rho = b.\theta$ و $z = a.\theta$ ، a و b ثابتان موجبان في المجال $0 \leq \theta \leq 4\pi$ . ثم مثل أشعة الواحدة عند النقطة ( $\theta_0 = \pi/4$ )